宇治久世教研算数数学分科会

平均の速さと瞬間の速さ

2013/10/23 Wed プラムイン城陽

東宇治中学校分会　田中正浩

1．関数$y=ax^2$の指導

中学3年生では1，2年生で学習したことを基礎に，より発展的な内容として平方根，2次方程式，関数$y=ax^2$，相似，円周角の定理，三平方の定理などを学習する。2年生の連立方程式や1次関数，図形の証明ですでにつまづいている生徒にとって3年の数学はなかなかハードな内容と言えよう。中でも関数を苦手としている生徒は多く，「前門の虎」2次方程式をなんとかクリアした後にやってくる$y=ax^2$についてはまさに「後門の狼」的存在である。しかし，自由落下など身近な運動が2次関数になっており，そうしたものとの関連の中で扱うことで興味を持たせられないかと考え，以下の指導案を考えてみた。

2．変化の割合

一般に，関数 $y=f(x)$でxの値がpからqまで増加するとき，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$を「変化の割合」という。これはグラフでは2点$(p, f(p))$，$(q, f(q))$を結ぶ直線の傾きを表している。（以前は「変化の割合」を「平均変化率」または「平均の変化の割合」と「平均」をつけて呼んでいた。また，現行では$f(x)$ という表記は教科書になく，不便である。）

xの値がpからqまで変化するとき，一次関数$y=ax+b$では変化の割合は一定である。このことは次の式から明らかである。

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{(aq+b)-(ap+b)}{q-p}=\frac{a(q-p)}{q-p}=a$$

したがって，そのグラフは傾きaの直線になる。

これに対し，関数$y=ax^2$では変化の割合はp，qの値によって異なる値をとる。すなわち，

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{aq^2-ap^2}{q-p}=\frac{a(q^2-p^2)}{q-p}=\frac{a(q+\mathrm{p})(q-p)}{q-p}=a(p+q)$$

したがって，そのグラフはp，qの値によって傾きが変わり，$pq>0$の場合，p，qの絶対値が大きいほど変化の割合の絶対値は大きくなることから「グラフは原点から遠ざかるほど急になる」ことが言える。

なお，$a(p+q)$ は以前の教科書には掲載されておらず，現行のものも「発展的な内容」扱いであるが，授業では必ず扱うようにしている。

3．平均の速さ

変化の割合の応用として「平均の速さ」を扱う。物体が自然落下するとき，時間をx(s)，距離をy(m)とすると，$y=5x^2$ と表される。（1G＝10m/s^2 とした）

p秒後からq秒後までの「平均の速さ」は $\dfrac{進んだ距離(m)}{かかった時間(秒)}$ $=\dfrac{yの増加量}{xの増加量}=5(p+q)$となる。
たとえば，手を離してから1秒後にボールは5m，3秒後に45m下まで移動するが，その間の平均の速さは$5\times(1+3)=20$m/sと求められる。（つまり，平均の速さはこの場合の変化の割合であり，グラフの傾きを求めることと同じである。）

また，この式から，時間がたつにつれて落下速度はどんどん速くなることが分かる。

4．瞬間の速さ

では，手を離してから2秒後のボールの「瞬間の速さ」はどうすれば求められるだろうか。ここからは「発展的な内容」を超えて，高校の履修内容になってくるが，中学生にも理解できると考え，あえて取り上げることにした。

一般に，関数 $y=f(x)$において，qを限りなくpに近づけたとき，変化の割合$\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$の極限値が存在するとき，その値は点$(p, f(p))$における接線の傾きに一致する。

関数$y=ax^2$ の場合，この値は$a(p+q)$で$q=p$ とすることで，$a(p+p)=2ap$と求められる。したがって，手を離してから2秒後のボールの「瞬間の速さ」は$2\times5\times2=20$ m/s。

これは次のように説明することもできる。

まず，2秒後から2.1秒後までの平均の速さを求めると $5(2+2.1)=20.5$ m/s

次に，2秒後から2.01秒後までなら $5(2+2.01)=20.05$ m/s

さらに2秒後から2.001秒後までなら $5(2+2.001)=20.005$ m/s　…

このようにしてxの増加量を限りなく0に近づけていくと，変化の割合（速さ）は限りなく20m/sに近づいていく…。

さて，20 m/sという速さがどれぐらいのものか。風速20 m/s なら台風である。時速に換算すると，72 km/hであるが，一般道ならスピード違反である。これは，高さ20mから落下した物体が地面に到達する瞬間の速さであるが，かなりの衝撃であることが想像できるだろう。

5．微分・積分

2次関数の応用として，微分や導関数の考え方に少しだけ触れてみた。実際には準備不足もあり，中間テストの返却時の余った時間を活用して簡単に説明をしただけだったので，正直言ってあまり反応はよくなかった。

ところで，「極限」を使った考え方は円の面積の説明にも使える。

円に外接する正n角形を，その辺を底辺，円の中心を頂点とするn個の二等辺三角形に分割する。三角形の面積はar（aは底辺，rは半径）と表せる。nを大きくすればaの合計は限りなく円周＝$2\pi r$に近づくから，

円の面積$=\Sigma\ \dfrac{1}{2}$ △の面積$=\Sigma\ \dfrac{1}{2}ar=\dfrac{1}{2}r\Sigma a=\dfrac{1}{2}r\times2\pi r=\pi r^2$

小学校では三角形ではなく、平行四辺形で説明するが，いずれにせよ積分の考え方である。中学校では微分も積分もまったく教えないが，当然のように円の面積や球の体積の公式を覚えさせ，計算させている。また，今は2次関数といっても$y=ax^2$　の形（2乗比例）しか教えないが，以前は一般的な2次関数や3次関数も教えていた。詰め込みはよくないと思うが，数学的なおもしろさという点では$y=ax^2$ だけではどうかという気がする。